

SP2 - Exercice corrigé : la fibre optique

1 La fibre optique à saut d'indice

Pour guider la lumière dans une direction donnée, on réalise des fibres optiques, longs fils cylindriques dont l'indice diminue quand on s'éloigne de l'axe. La lumière suit la direction moyenne de l'axe grâce au phénomène de réflexion totale, à condition que le faisceau incident ait une ouverture angulaire convenable.

Dans le modèle qui suit, on considère que la fibre est constituée d'un cœur cylindrique de rayon a , d'indice $n_1 = 1,510$ et d'une gaine de rayon extérieur b , d'indice $n_2 = 1,495$.

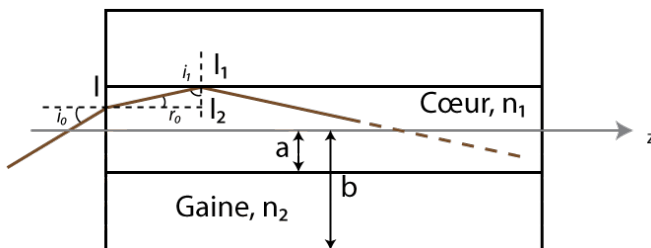


FIGURE 1 – Vue en coupe d'une fibre à saut d'indice

1. Un rayon incident se propage dans l'air dans un plan axial de la fibre et arrive en I, à une distance $OI < a$ de l'axe, sur une extrémité de la fibre, sous un angle d'incidence i_0 . On note i_1 l'angle que fait le rayon avec la normale séparant la gaine du cœur. Déterminer la condition sur i_1 tel qu'il y a guidage dans la fibre.
2. Exprimer la relation entre i_0 et i_1 .
3. En déduire la condition sur i_0 , de la forme $i_0 < i_m$, permettant le confinement du rayon dans la fibre.
4. On appelle ouverture numérique O.N. la quantité $\sin(i_m)$. Exprimer O.N. en fonction de n_1 et n_2 .
5. Supposons que l'on envoie dans la fibre une impulsion lumineuse sous la forme d'un faisceau conique convergent, de demi-angle au sommet $i_s < i_m$. Calculer le temps t_0 mis pour parcourir une distance L pour un rayon d'angle $i_0 = 0$, puis le temps t_1 pour un rayon d'angle i_s . Que constate-t-on ?
6. Evaluer $\Delta t = t_1 - t_0$ pour $L = 10 \text{ m}$, $i_s = 8^\circ$ et $c = 3 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

2 Atténuation du signal

L'atténuation de la lumière dans les fibres optiques est due à l'absorption et à la diffusion par le matériau constitutif du cœur, en général en silice et par ses impuretés (fer, cuivre,...). On la mesure couramment en décibel par kilomètre : $A_{\text{dB/km}} = 10 \log\left(\frac{\Phi_{\text{entrant}}}{\Phi_{\text{sortant}}}\right)$ où Φ désigne le flux lumineux. Cette atténuation dépend de la longueur d'onde de la lumière envoyée dans la fibre.

1. Pour de la lumière rouge $\lambda = 800 \text{ nm}$, $A = 1,2 \text{ dB/km}$. Au bout de combien de kilomètres restera-t'il 10% du flux incident ?
2. Même question dans l'infrarouge à 1300 nm où $A = 0,4 \text{ dB/km}$ et à 1550 nm où $A = 0,25 \text{ dB/km}$? En pratique, les lasers employés dans les télécommunications sont conçus pour émettre autour de 1550 nm , à votre avis pourquoi ?

3 Problème de courbure

Considérons maintenant que la fibre se courbe, et pour simplifier supposons qu'elle décrive un arc de cercle de rayon de courbure $r = 200 \text{ mm}$.

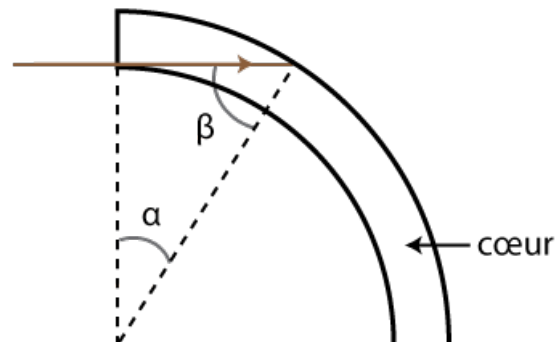


FIGURE 2 – Fibre optique courbée

1. Pour un rayon pénétrant dans la fibre perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, calculer l'angle que fait le rayon avec la normale lorsqu'il rencontre l'interface gaine/cœur. Y'a-t'il réflexion totale, si $a = 1 \text{ mm}$?
2. A quelle condition sur le rayon de courbure cette condition de réflexion totale n'est plus respectée ?
3. Citer des applications courantes de la fibre optique.

Correction

1 La fibre optique à saut d'indice

1. D'après les lois de Descartes au point I_1 , il y a réflexion totale si $\sin(i_1) > \frac{n_2}{n_1}$ comme $n_2 < n_1$. Numériquement, $i_1 > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 81,9^\circ$.

2. Dans le triangle II_1I_2 , on a la relation $i_1 + r_0 + \frac{\pi}{2} = \pi$, soit $r = \frac{\pi}{2} - i_1$, et en appliquant la relation de Descartes en I $\sin(i_0) = n_1 \sin(r) = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) = n_1 \cos(i_1)$.

Donc

$$\sin(i_0) = n_1 \cos(i_1)$$

3. Avec la relation $\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$, $\sin(i_0) = n_1 \sqrt{1 - \sin^2(i_1)} < n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$. Donc

$$\sin(i_0) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

4. Trivialement l'ouverture numérique vaut

$$ON = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} = 0,212$$

5. Le rayon lumineux arrivant avec un angle $i_0 = 0$ parcourt une distance L , et met donc un temps

$$t_0 = \frac{L}{v} = \frac{n_1 L}{c}$$

Dans le second cas, la longueur à parcourir est plus grande : pour une longueur L selon z , le rayon parcourt une distance $\frac{L}{\cos(r_s)}$ avec $\sin(i_s) = n_1 \sin(r_s)$. Donc

$$t_1 = \frac{n_1 L}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\sin(i_s)}{n_1}\right)^2}$$

On constate alors que le temps de parcours est plus long !

6. Finalement

$$\Delta t = \frac{n_1 L}{c} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\sin(i_s)}{n_1}\right)^2} - 1 \right)$$

soit numériquement

$$\Delta t = 2,15 \times 10^{-10} \text{ s}$$

Plusieurs remarques :

- d'une part cela signifie que le débit d'informations est limité, car si on envoie deux impulsions pendant un temps inférieur à Δt , elles vont se chevaucher après propagation
- les technologies de fibres actuelles sont conçues de telle sorte à compenser un maximum cette différence de temps de parcours. L'idée est alors de faire varier continûment l'indice optique du cœur de telle sorte qu'il décroisse en s'éloignant du

centre. Ainsi la vitesse de propagation $\frac{c}{n}$ croît, ce qui permet de compenser partiellement la plus grande longueur de trajet.

2 Atténuation du signal

1. On cherche la distance à laquelle $\frac{\Phi_{\text{entrant}}}{\Phi_{\text{sortant}}} = 10$. Avec $A = 10 \log(10) = 1,2 \text{ dB/km}$,

$$L = \frac{10 \log(10)}{1,2} = 8,3 \text{ km}$$

2. On fait de même pour les autres longueurs d'onde : $L_{1300 \text{ nm}} = 25 \text{ km}$ et $L_{1550 \text{ nm}} = 40 \text{ km}$. On constate ainsi l'intérêt de choisir une longueur d'onde adaptée pour diminuer les pertes : le choix de 1550 nm est le plus adapté, car il correspond à une atténuation minimale. On comprend aisément le dilemme quand on sait qu'il y a au fond de l'océan atlantique une très grande ligne constituée de fibres optiques permettant une liaison intercontinentale très rapide.

3 Problème de courbure

1. Avec $\cos(\alpha) = \frac{r-a}{r}$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{r-a}{r}\right)$, l'application numérique donne $\beta = 84,3^\circ$

Comme $\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 81,9^\circ$, il y a bien réflexion totale et le faisceau est bien confiné.

2. A la limite de réflexion totale, $\beta = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{r-a}{r}\right) \Rightarrow \frac{r-a}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$, soit $r_{\min} = \frac{a}{1 - \sin(\beta)} = \frac{a}{1 - \frac{n_2}{n_1}}$. Numériquement $r_{\min} = 101 \text{ mm}$

Il faut donc un minimum précautionneux lorsqu'on emploie une fibre optique.. De plus, elle reste un peu fragile, rappelons qu'il s'agit de verre très fin !

3. On peut citer, outre les **télécommunications**, quelques applications médicales comme l'**endoscope** permettant un examen non invasif à l'intérieur du corps humain (il est composé d'un grand nombre de fibres, certaines servant à éclairer, d'autres à récupérer la lumière émise par la cible éclairée); on peut également évoquer son utilité en tant que **capteur** (température, pression), voire en **microscopie** (on peut sonder à l'aide d'une fibre optique étirée dans sa longueur à des échelles micrométriques).